Langages formels (11X003) - Automne 2025

# 9. Lemme de l'étoile hors-contexte (et au-delà)

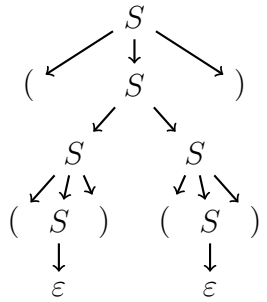
*Enseignant: Arnaud Casteigts*

*Assistants: A.-Q. Berger & M. Marseloo*
*Moniteurs: N. Beghdadi & E. Bussod*

Nous avons déjà vu comment montrer qu'un langage n'est pas régulier en utilisant le lemme de l'étoile (*c.f.* Cours 5). Dans ce cours, nous allons utiliser une démarche analogue pour les langages hors-contextes, en utilisant une autre version du lemme de l'étoile.

## 9.1 Lemme de l'étoile hors-contexte (intuition)

Par définition, si un langage $L$ est hors-contexte, alors il peut être engendré par une grammaire hors-contexte $G$. Chaque mot de $L$ correspond alors à un *arbre de dérivation* de $G$, comme dans l'exemple ci-contre pour le mot "(()())" et la grammaire $S \to (S) \mid SS \mid \epsilon$, vue dans un cours précédent.




De manière plus générale, étant donné une grammaire $G$ et un mot $z$ de $L(G)$. Si la longueur de $z$ est suffisamment grande, alors pour n'importe quel arbre de dérivation qui lui correspond, au moins une variable doit être *répétée* dans un chemin de la racine vers les feuilles. Cela est illustré ci-dessous pour une grammaire quelconque dans laquelle une variable $N$ serait répétée :

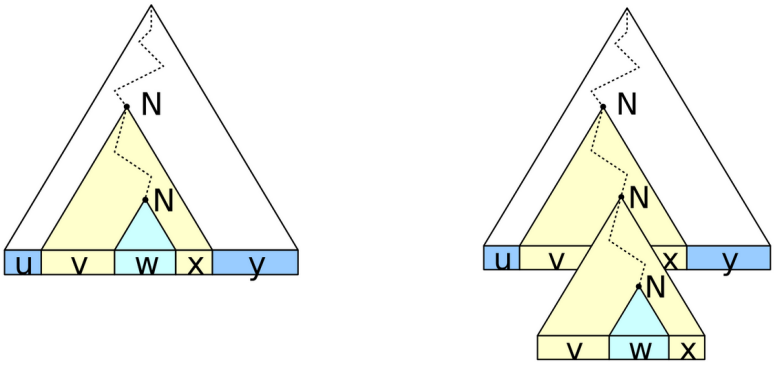



FIGURE 1 – À gauche : arbre de dérivation d'un mot $z$ suffisamment long. À droite : arbre de dérivation d'un mot $z'$ obtenu en répétant le comportement d'une partie de la dérivation.

Un tel mot $z$ peut alors être décomposé en facteurs $uvwxy$ (voir le dessin), tels que $u$ (resp. $y$) correspond à la partie du mot produite à gauche (resp. à droite) de la première occurrence de la variable $N$, et $vwx$ est la partie dérivée de la première variable $N$, où $v$,$w$,$x$ sont les parties dérivées à gauche, en dessous, et à droite (respectivement) de la deuxième occurrence de $N$. Puisque la variable $N$ est capable de se reproduire elle-même, elle pourrait également le faire un nombre arbitraire de fois avant de produire $w$ (dessin de droite), ce qui implique que le mot $uv^iwx^iz$ doit aussi faire partie du langage pour tout $i \geq 0$.

## 9.2 Le lemme lui-même

Un lemme de l'étoile pour les langages hors-contexte est similaire à celui que nous connaissons pour les langages réguliers. Il s'agit d'une propriété que tout langage hors-contexte *doit* satisfaire. Le voici :

**Lemme 9.1** (Lemme de l'étoile pour les LHC)**.** *Si $L$ est un langage hors-contexte, alors il existe une longueur $k$ au delà de laquelle tout mot $z \in L$ peut s'écrire $z = uvwxy$ avec :*

1. $|v| + |x| > 0$
2. $|vwx| \leq k$
3. $uv^iwx^iy \in L$ *pour tout* $i \in \mathbb{N}$.

Prenons l'exemple du langage $L = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ (qui est hors-contexte). Soit $k$ la longueur critique associée à ce langage. Prenons un mot $z \in L$ tel que $|z| > k$, par exemple $z = \mathtt{a}^k\mathtt{b}^k$. On peut décomposer $z$ sous la forme $u \cdot v \cdot w \cdot x \cdot y$ avec $u = \mathtt{a}^{k-1}, v = \mathtt{a}, w = \varepsilon, x = \mathtt{b}$ et $y = \mathtt{b}^{k-1}$. On a bien $|vwx| \leq k$ et $|vx| > 0$. Enfin, il est facile de voir que $uv^iwx^iy \in L$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.

L'usage de ce lemme est similaire à celui pour les langages réguliers : si l'on veut montrer qu'un langage $L$ n'est *pas* hors-contexte, il suffit de montrer que pour n'importe quel $k$, il existe un mot plus long que $k$ qui *ne peut pas être décomposé* sous la forme indiquée. Comme pour l'autre lemme de l'étoile, cela se fait généralement par l'absurde, en supposant que le lemme est satisfait et en obtenant une contradiction.

### 9.2.1 Exemple

Montrons que le langage $L = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n\mathtt{c}^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ n'est pas hors-contexte. Par l'absurde, supposons que $L$ est hors-contexte, le lemme nous dit qu'il existe un $k$ tel que tout mot $z$ de longueur $\geq k$ est décomposable en facteurs $uvwxy$ avec les trois propriétés vraies. Nous allons montrer que cela est faux. Quel que soit $k$, on peut prendre le mot $z = \mathtt{a}^k\mathtt{b}^k\mathtt{c}^k \in L$. Ce mot est censé être décomposable sous la forme $uvwxy$ de sorte que $|v| + |x| \geq 0$ et $|vwx| \leq k$. Il y a cinq cas possibles pour la partie $vwx$ :

- $vwx$ ne contient que des `a`
- $vwx$ ne contient que des `b`
- $vwx$ ne contient que des `c`
- $vwx$ ne contient que des `a` et des `b`
- $vwx$ ne contient que des `b` et des `c`

Observez que $vwx$ ne peut pas contenir les trois types de symboles, car $|vwx| \leq k$, ce qui est trop petit pour cela. Examinons maintenant les conséquences de la répétition des facteurs $v$ et $x$ (propriété 3 du lemme). Si $vwx$ ne contient que des `a`, on obtiendra un mot qui a trop de `a` (donc pas dans $L$, contradiction). Idem pour `b` et pour `c`. Dans les deux derniers cas, au moins l'un des deux symboles qui apparaît se retrouvera en trop grande quantité par rapport au troisième symbol qui n'apparaît pas. Dans tous les cas, on arrive donc à une contradiction, ce qui implique que $z$ n'est pas décomposable sous la forme spécifiée et donc $L$ n'est pas hors-contexte.

## 9.3 Au delà des langages hors-contextes

Nous avons vu que le langage $\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n\mathtt{c}^n$ n'est pas hors-contexte (via le lemme de l'étoile pour les LHC). Ce langage appartient à la famille suivante, qui est celle des *langages contextuels* dont les langages hors contextes sont des cas particuliers (un air de déjà vu...).

### 9.3.1 Grammaire contextuelle

Une grammaire $G = (V, \Sigma, \mathcal{P}, S)$ est **contextuelle** si toutes les règles de production de $\mathcal{P}$ sont de la forme $uXv \to u\,\gamma\,v$, où $u$ et $v$ sont des mots quelconques de $(V \cup \Sigma)^*$ appelés le *contexte* de cette règle, $X$ est une variable de $V$ et $\gamma$ est un mot quelconque de $(V \cup \Sigma)^+$. Notez le $^+$ et non le $^*$ pour $\gamma$, car on interdit $\gamma$ d'être vide pour interdire que la longueur d'un mot intermédiaire puisse diminuer en cours de dérivation (ce qui rendrait la grammaire trop puissante). Du coup, si l'on veut que $\varepsilon$ fasse partie du langage, on ajoute explicitement la règle $S \to \varepsilon$ en plus des autres règles (en interdisant que $S$ soit aussi utilisée dans la partie droite d'une autre règle, sinon on retombe sur le cas où la taille peut diminuer).

Conceptuellement, la principale nouveauté de ces grammaires est que l'activation d'une règle pour remplacer une variable $X$ peut dépendre de ce qui se trouve autour : son *contexte*. Le contexte lui-même n'a pas le droit de changer, mais cela donne déjà plus de puissance.

#### Exemple

Le langage $L = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n\mathtt{c}^n \mid n \geq 1\}$ peut être engendré par la grammaire suivante :

1. $S \to \mathtt{a}BC$
2. $S \to \mathtt{a}SBC$
3. $CB \to CZ$
4. $CZ \to WZ$
5. $WZ \to WC$
6. $WC \to BC$
7. $\mathtt{a}B \to \mathtt{ab}$
8. $\mathtt{b}B \to \mathtt{bb}$
9. $\mathtt{b}C \to \mathtt{bc}$
10. $\mathtt{c}C \to \mathtt{cc}$

Les deux premières règles permettent de générer les mots intermédiaires de la forme $\mathtt{a}^n(BC)^n$, par exemple $\mathtt{aaa}BCBCBC$. Notez qu'à ce stade, les variables $B$ et $C$ se retrouvent entrelaçées. Les règles 3 à 6 permettent d'échanger successivement chaque motif $CB$ en $BC$ (ce qui ne peut pas être fait en une seule règle dans le format imposé) ; Enfin, les règles 7 à 10 permettent de remplacer les variables $B$ et $C$ par les symboles terminaux correspondant (`b` et `c`), à condition qu'ils soient à la bonne place (grâce au contexte !).

Voyons comment produire le mot `aabbcc` (les numéros des règles utilisées sont inscrits à côté de chaque flèche) :

```
S
→2  aSBC
→1  aaBCBC
→3  aaBCZC
→4  aaBWZC
→5  aaBWCC
→6  aaBBCC
→7  aabBCC
→8  aabbCC
→8  aabbcC
→9  aabbcC
→10 aabbcc
```

En terme de machine les reconnaissant, les langages contextuels correspondent exactement aux *machines de Turing linéairement bornés*. Ces machines sont un cas particulier de machines de Turing, dont la mémoire est proportionnelle à la longueur du mot d'entrée (le facteur de proportionalité dépend du langage). Nous ne prendrons pas trop de temps à parler de ce modèle intermédiaire et passerons directement aux machines de Turing (non bornées).