

---

**Sommaire**

---

<b>9.1 Introduction</b> . . . . .	<b>157</b>
<b>9.2 Calcul d'un 3-spanner</b> . . . . .	<b>158</b>
<b>9.3 Exercices</b> . . . . .	<b>161</b>
<b>Bibliographie</b> . . . . .	<b>162</b>

---

NOUS ALLONS introduire le calcul de *spanners* dans le modèle LOCAL. Les *spanners* sont des sous-graphes couvrant les sommets d'un graphe possédant une faible densité d'arêtes. De plus ils garantissent que les distances dans les sous-graphes ne sont pas trop éloignées des distances originales.

## 9.1 Introduction

L'utilisation de sous-graphe couvrant, c'est-à-dire qui contient tous les sommets du graphe d'origine, est banale en informatique. Typiquement un arbre couvrant un graphe connexe  $G$  à  $n$  sommets garantit la connexité alors qu'il ne possède que  $n-1$  arêtes. Cela peut être particulièrement intéressant en calcul distribué de minimiser de nombre de liens sans pour autant déconnecter  $G$ .

On a vu dans les chapitres précédents que le nombre de messages nécessaire à résoudre certaines tâches peut être réduit si un arbre préexistant était connu des processeurs. Au chapitre 6, on a vu que la connaissance d'un sous-graphe couvrant peu dense pouvait être utilisé pour construire des synchroniseurs.

De manière générale, on souhaite construire un graphe couvrant peu dense préservant les distances d'origines. Bien sûr il n'est pas possible de supprimer des arêtes sans modifier au moins une distance. Néanmoins on souhaite limiter ces modifications. La définition suivante s'applique aussi bien au cas des graphes valués que non valués.

**Définition 9.1** Soient  $G$  un graphe et  $H$  un sous-graphe couvrant de  $G$ , c'est-à-dire avec  $V(G) = V(H)$ . L'étirement de  $H$  est la plus petite valeur  $s$  telle que, pour tout sommets  $u, v$  de  $G$ ,  $d_H(u, v) \leq s \cdot d_G(u, v)$ .

### EXEMPLES

Dans la littérature on appelle aussi  $s$ -spanner tout sous-graphe couvrant d'étirement  $s$  (*stretch* en Anglais).

Dans la suite, on va essentiellement considérer que les graphes sont non valués.

Le problème qu'on se fixe est donc de calculer de manière distribué, dans le modèle LOCAL, des sous-graphes couvrant avec peu d'arêtes et si possible un étirement faible. On se base essentiellement sur l'article [DGPV08].

Formellement, calculer un sous-graphe  $H$  signifie que chaque sommet  $u$  doit sélectionner un ensemble d'arêtes qui lui sont incidentes, disons  $H(u)$ . Le graphe calculé est alors le graphe  $\bigcup_{u \in V(G)} H(u)$  composé de l'union de tous ces choix.

Notons qu'il n'est pas formellement imposé que les deux sommets extrémités d'une arête s'accordent sur leur décision, c'est-à-dire  $uv \in H(u)$  n'implique pas forcément  $uv \in H(v)$ . Cependant, avec une ronde supplémentaire, on peut toujours faire en sorte que tous les sommets se mettent d'accord (par exemple sur le fait de garder l'arête si l'un des deux l'a sélectionnée, ou le contraire, de ne pas la garder si l'un des deux ne l'a pas gardé).

## 9.2 Calcul d'un 3-spanner

On va voir un algorithme permettant de calculer un sous-graphe couvrant d'étirement 3 avec significativement moins de  $n^2$  arêtes, en fait  $2n^{1.5}$ . Il suffit de seulement deux rondes. La décision de sélectionner ou non les arêtes est donc locale.

Avant de présenter l'algorithme, remarquons que le problème n'a rien d'évident. Décider localement de supprimer une arête est *a priori* très risqué, puisque par exemple un sommet n'a aucun moyen de deviner s'il est dans un arbre ou pas (ils ne connaissant pas, par exemple, le nombre d'arêtes du graphe et le degré d'un sommet peut être non borné, ou les cycles passant par le sommet trop grand pour être détecté en deux rondes). Bien sûr pour avoir un l'étirement borné, aucun sommet d'un arbre ne peut supprimer d'arête. D'un autre côté, si aucun sommet de degré élevé ne supprime d'arête on pourrait avoir de l'ordre de  $n^2$  arêtes si le graphe  $G$  était très dense.

- présenter l'algo de BKMP05 (slides/Aladdin-PODC08 ...)

**Théorème 9.1** ([BKMP05]) Pour tout graphe  $G$  à  $n$  sommets, il existe un algorithme probabiliste de type Monté Carlo qui calcule en deux rondes un sous-graphe couvrant de  $G$  d'étirement  $\leq 3$  et en moyenne au plus  $2n^{3/2}$  arêtes.

**Preuve.**

1.  $b_u := 1|0$  avec probabilité  $1/\sqrt{n}$ ,  $X := \{u : b_u = 1\}$
2. [ $u \in Z$ ] Si  $B(u, 1) \cap X = \emptyset$ , alors  $S_u := B(u, 1)$
3. [ $u \in X$ ] Si  $b_u = 1$ , alors  $S_u := \text{BFS}(u, B(u, 2))$

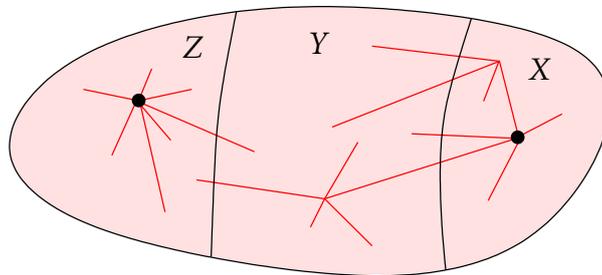


FIGURE 9.1 – Illustration de l’algorithme de type Monté Carlo pour le calcul d’un sous-graphe couvrant d’étirement  $\leq 3$ .

Complexité en temps : 2 rondes

Étirement : 3 (les seules arêtes  $e$  dans  $G$  et pas dans  $H$  ont leur deux extrémités dans  $Y$ )

Taille : en moyenne,  $|X| = \sqrt{n}$  et si  $u \in Z$ , alors  $\deg(u) \leq \sqrt{n}$  en moyenne.

□

Jusqu’à récemment, aucun algorithme déterministe n’était connu pour ce problème. Ils existent des algorithmes en deux rondes, mais qui ne garantissent le nombre d’arêtes seulement en moyenne [BKMP05]. Le problème des algorithmes aléatoires de ce type (Monté Carlo) est qu’on est pas certain du résultat, contrairement aux algorithmes de type Las Vegas. Et contrairement au calcul séquentiel, en distribué il n’est pas toujours facile de vérifier la condition (comment vérifier que le nombre d’arêtes est correct sans une diffusion globale?). En général, en distribué, on ne peut jamais recommencer!

Dans la suite, on rappelle que  $B(u, 1)$  représente l’ensemble formé de  $u$  et des voisins de  $u$ , la boule centrée en  $u$  et de rayon 1. Évidemment,  $|B(u, 1)| = \deg(u) + 1$ .

---

 Algorithme Span3  
 (code du sommet  $u$ )
 

---

1. NEWPULSE
  2. Envoyer son identifiant et recevoir l'identifiant de tous ses voisins.
  3. Choisir un ensemble  $R_u$  composé de son identifiant et d'un sous-ensemble arbitraire des identifiants reçus tel que  $|R_u| = \min\{|B(u, 1)|, \lceil \sqrt{n} \rceil\}$ .
  4. NEWPULSE
  5. Envoyer  $R_u$  et recevoir la sélection  $R_v$  de chaque voisin  $v$ .
  6. Poser  $H(u) := \{uv : v \in R_u, v \neq u\}$  et  $W := B(u, 1) \setminus \{v : u \in R_v\}$ .
  7. Tant qu'il existe  $w \in W$  :
    - (a)  $H(u) := \{uw\} \cup H(u)$ .
    - (b)  $W := W \setminus \{v \in W : R_v \cap R_w \neq \emptyset\}$ .
- 

Il y a une variante où  $u$  ne connaît pas le nombre  $\lceil \sqrt{n} \rceil$ , mais qui nécessite une ronde de plus. L'algorithme peut aussi être adapté pour fonctionner avec des poids arbitraires sur les arêtes : il faut choisir  $R_u$  parmi ses plus proches voisins et le sommet  $w$  parmi les plus proches restant de  $W$ .

**Théorème 9.2** *Pour tout graphe  $G$  à  $n$  sommets, l'algorithme Span3 calcule en deux rondes un sous-graphe couvrant de  $G$  d'étirement  $\leq 3$  et avec moins de  $2n^{3/2}$  arêtes.*

**Preuve.** L'algorithme comprends deux rondes de communications.

**Étirement.** Soit  $uv$  une arête de  $G$  qui n'est pas dans le sous-graphe couvrant  $H = \bigcup_u H(u)$  (figure 9.2(a)). Clairement toutes les arêtes de la forme  $uw$  avec  $w \neq u$ ,  $u \in R_u \cup R_w$  et  $w \in B(u, 1)$  existent dans  $H$ . Donc si cette arête a été supprimée c'est que  $v$  a été supprimé de  $W$  à l'étape 7b de l'algorithme (figure 9.2(b)). Si  $v$  est supprimé de  $W$  à l'étape 7b, c'est que  $R_v$  et  $R_w$  s'intersectent (figure 9.2(c)). Or dans  $H$  toutes les arêtes de  $v$  vers  $R_v$  et de  $w$  vers  $R_w$  existent. Donc il existe dans  $H$  un chemin de  $u$  à  $v$  de longueur trois.

Il suit qu'un plus court chemin de  $x$  à  $y$  dans  $H$  est de longueur au plus trois celle d'un plus court chemin  $P$  de  $G$ , chaque arête de  $P$  qui n'est pas dans  $H$  étant remplacée par un chemin de  $H$  d'au plus trois arêtes.

**Nombre d'arêtes.** Montrons que tout sommet  $w$  de l'ensemble  $W$  calculé à l'étape 6 est tel que  $|B(w, 1)| > \lceil \sqrt{n} \rceil$ . En effet, si  $|B(w, 1)| \leq \lceil \sqrt{n} \rceil$ , alors  $|R_w| = \min\{|B(w, 1)|, \lceil \sqrt{n} \rceil\} = |B(w, 1)|$ . Donc  $R_w$  contiendrait tous les voisins de  $w$ , en particulier  $u$ . Or ce n'est pas le cas, donc  $|B(w, 1)| > \lceil \sqrt{n} \rceil$ . Il suit que  $|R_w| = \lceil \sqrt{n} \rceil$ .

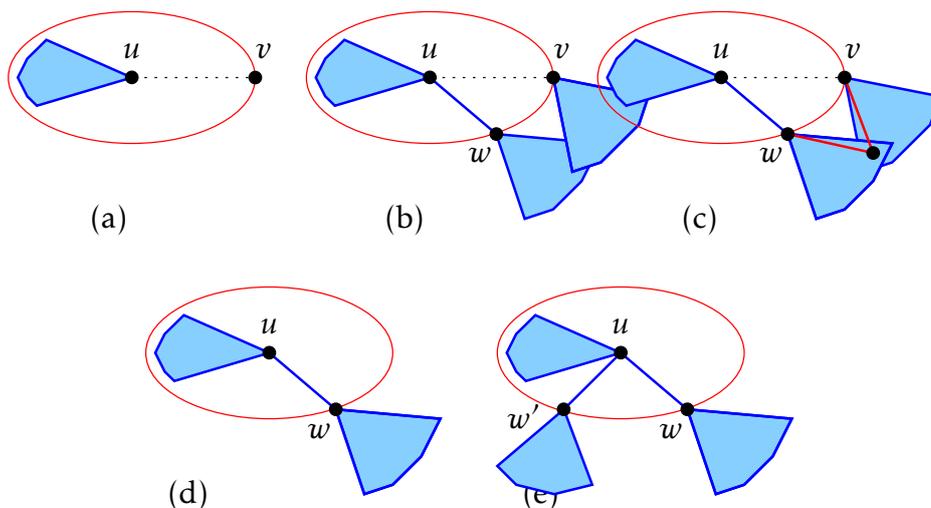


FIGURE 9.2 – Illustration de la preuve du théorème 9.2.

Les sommets sélectionnés dans la boucle « Tant que » ont, par construction, des ensembles deux à deux disjoints, c'est-à-dire  $R_w \cap R_{w'} = \emptyset$  (figure 9.2(e-d)) puisque ceux qui intersectent  $R_w$  sont supprimés à jamais de  $W$ . Il suit que le nombre de sommets sélectionnés lors de la boucle « Tant que » est au plus  $|B(u, 2)| / \lceil \sqrt{n} \rceil \leq n / \sqrt{n} = \sqrt{n}$  chaque ensemble  $R_w$  étant inclus dans  $B(u, 2)$  qui est de taille au plus  $n$ .

Le nombre d'arêtes sélectionnées par  $u$  est donc au plus  $|R_u| - 1 + \sqrt{n} \leq \lceil \sqrt{n} \rceil - 1 + \sqrt{n} < 2\sqrt{n}$ . Au total  $H$  n'a pas plus de  $2n^{3/2}$  arêtes.  $\square$

### 9.3 Exercices

Étendre l'algorithme à un algorithme qui ne nécessite pas la connaissance de  $n$ . Combien de rondes cela nécessite ?

**SOLUTION.** Il faut choisir une sélection de  $\lceil \sqrt{|B(u, 3)|} \rceil$  voisins au lieu de  $\lceil \sqrt{n} \rceil$ . Pour cela il faut au moins 3 rondes.

Problème ouvert : Peut-on réaliser la tâche précédente avec seulement deux rondes ?

### Bibliographie

- [BKMP05] S. BASWANA, T. KAVITHA, K. MEHLHORN, AND S. PETTIE, *New constructions of  $(\alpha, \beta)$ -spanners and purely additive spanners*, in 16th Symposium on Discrete Algorithms (SODA), ACM-SIAM, January 2005, pp. 672–681.

- [DGPV08] B. DERBEL, C. GAVOILLE, D. PELEG, AND L. VIENNOT, *On the locality of distributed sparse spanner construction*, in 27th Annual ACM Symposium on Principles of Distributed Computing (PODC), ACM Press, August 2008, pp. 273–282. DOI : [10.1145/1400751.1400788](https://doi.org/10.1145/1400751.1400788).